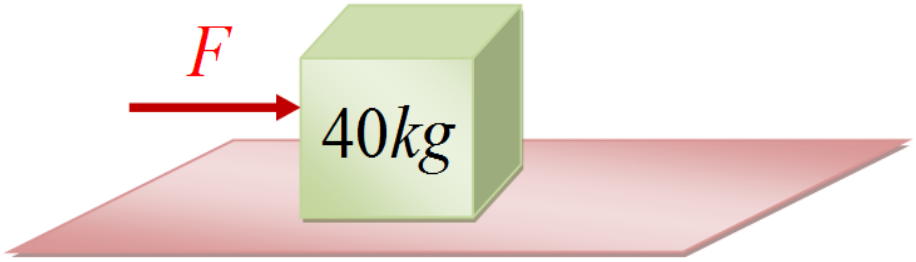
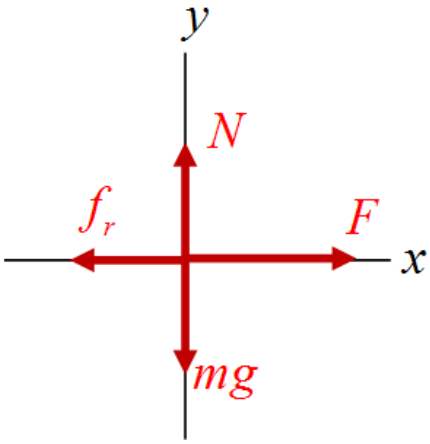
EJERCICIOS RESUELTOS DE TRABAJO Y ENERGÍA

1. Un bloque de 40 kg que se encuentra inicialmente en reposo, se empuja con una fuerza de 130 N, desplazándolo en línea recta una distancia de 5m a lo largo de una superficie horizontal de coeficiente de fricción 0.3 (ver figura). Calcular: a) el trabajo de la fuerza aplicada, b) el trabajo de la fuerza de fricción, c) la variación de energía cinética, d) la rapidez final del mueble, e) la potencia final de la fuerza aplicada.



Solución

El diagrama de fuerzas para el mueble de masa m de la figura se muestra a continuación.



a) $W_F = F\Delta X\cos\theta = F\Delta X \cos 0^o = F\Delta X = (130N)(5m) = 650J$

b) $f_r = \mu N = \mu mg$, entonces:

$W_{f_r} = f_r \times \Delta X\cos 180^o = -\mu mg\Delta X = WR = -0.3\cdot(40Kg)(9.8m/s^2)(5m) = -588\ J$

c) $W_{Total} = \Delta Ec \Rightarrow W_F + W_N + W_{fr} + W_{mg} = \Delta Ec$, pero $W_N = W_{mg} = 0$, ya que las fuerzas normal y peso son perpendiculares al desplazamiento, entonces:

$$\Delta Ec = WF + WR = 650J - 588J = 62J$$

d) Para calcular la rapidez final, usamos el resultado anterior.

$$\Delta E_C = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}m\cancel{v_i^2}^{\,0} = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v_f = \sqrt{\frac{2\Delta E_C}{m}}$$

Luego:

$$v_f = \sqrt{\frac{2\Delta E_c}{m}} = \sqrt{\frac{2(62J)}{40Kg}} = 1.76m/s$$

e) Usando la definición de potencia:

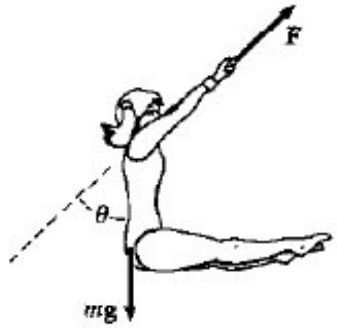
$$P = \vec{F}.\vec{v} = Fv_f \cos 0^o = Fv_f = (130N)(1.76m/s) = 228.8Watt$$

2. Un trapecio de circo está formado por una barra suspendida por dos cuerdas paralelas, cada una de longitud *l*. El trapecio permite al actor balancearse en un arco circular vertical (ver figura). Suponga que una trapecista con masa *m* sostenida de la barra, baja de una plataforma elevada, partiendo del reposo con un ángulo inicial θ_i con respecto a la vertical (ver figura). Suponga que; la talla de la trapecista es pequeña comparada con la longitud *l* del trapecio, que ella no empuja el trapecio para balancearse más alto, y que la resistencia del aire es despreciable.

a. Muestre que cuando las cuerdas forman un ángulo θ con respecto a la vertical, la trapecista debe ejercer una fuerza para mantenerse firme:

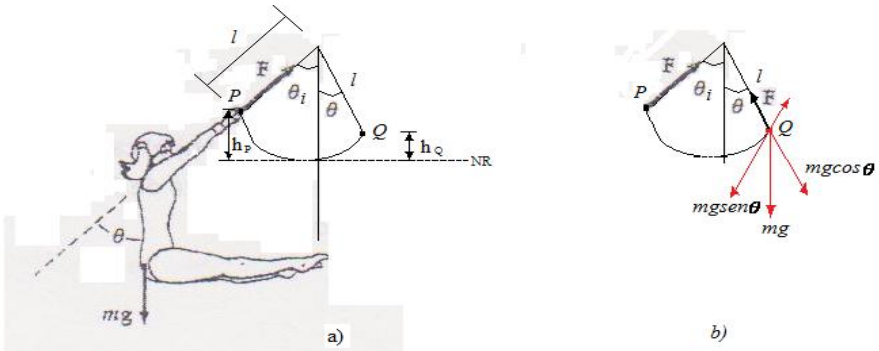
$$F = mg(3\cos\theta - 2\cos\theta_i)$$

b. Determine el ángulo inicial si en la parte más baja la fuerza es $2mg$.



Solución.

a) A continuación se ilustra un diagrama general de la situación.



De la figura a) se tiene que con respecto al nivel de referencia (NR), la energía mecánica asociada al trapecista en los puntos P y Q son:

$$E_P = mgh_P \qquad (1)$$

y

$$E_Q = \frac{1}{2}mv_Q^2 + mgh_Q \qquad (2)$$

Pero en este caso

$$h_P = l(1-\cos\theta_i) \qquad (3)$$

y

$$h_Q = l(1-\cos\theta) \qquad (4)$$

Luego al sustituir las ecuaciones (3) en (1) y (4) en (2) se tiene que:

$$E_P = mgl(1-\cos\theta_i) \qquad (5)$$

$$E_Q = \frac{1}{2}mv_Q^2 + mgl(1-\cos\theta) \qquad (6)$$

Como la energía se conserva, entones la energía del sistema en P debe ser igual a la energía en el punto Q; esto es:

$$\frac{1}{2}mv_Q^2 + mgl(1-\cos\theta) = mgl(1-\cos\theta_i)$$

De donde se tiene que:

$$v_Q^2 = 2gl(\cos\theta - \cos\theta_i) \qquad (7)$$

De la figura b) y el diagrama de fuerza en el punto Q se tiene que:

$$\sum F_{\hat{N}_Q} = F - gm\cos\theta = m\frac{v_Q^2}{l} \qquad (8)$$

Luego al sustituir la ecuación (7) en (8) y resolver para F se obtiene el siguiente resultado.

$$F - gm\cos\theta = 2mg(\cos\theta - \cos\theta_i)$$

Donde finalmente se tiene que:

$$F = mg(3\cos\theta - 2\cos\theta_i) \qquad (9)$$

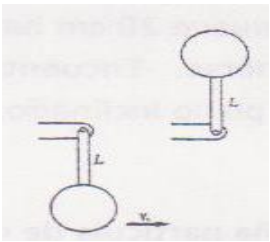
b) Cuando el trapecista está en la parte más baja se tiene que θ=0° y F=2mg, por lo que al sustituir en la ecuación (9) se tiene lo siguiente:

$$2mg = mg(3\cos 0^0 - 2\cos\theta_i)$$

ó

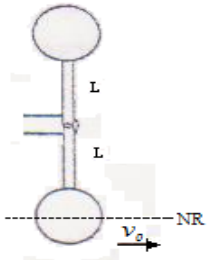
$$\theta_i = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) \quad = 60°$$

3. Una varilla rígida ligera mide 77cm de largo. Su extremo superior hace pivote en un eje horizontal de baja fricción. La varilla cuelga en línea vertical en reposo con una pequeña bola unida a su extremo inferior. Una persona golpea la bola, dándole de pronto una velocidad horizontal de modo que oscila alrededor en un círculo completo. ¿Qué rapidez mínima se requiere para hacerla llegar a la parte superior?



Solución.

Un diagrama general de la situación se ilustra a continuación.



Con respecto al nivel de referencia (NR) mostrado en la figura se tiene que la energía inicial del sistema es:

$$E_i = \frac{1}{2} m v_o^2 \qquad (1)$$

Mientras que cuando la bola alcanza la parte más alta de la curva la velocidad se hace cero y por tanto la energía mecánica asociada al sistema es netamente potencial; esto es:

$$E_f = 2mgL \qquad (2)$$

Como la energía mecánica se conserva, entonces:

$$E_i = E_f$$

Esto es:

$$\frac{1}{2} m v_o^2 = 2mgL$$

De donde se tiene que:

$$v_o = \sqrt{4gL}$$

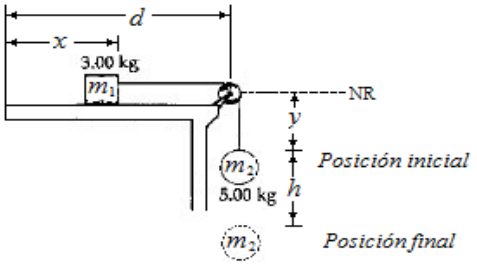
Como L=77*cm*=0.77*m* y g=9.8*m/s*^{2}, entonces la rapidez mínima que se requiere es:

$$v_o = \sqrt{4 \times \left(9.8 m/s^2\right) \times (0.77 m)} = 5.494 m/s$$

4. El coeficiente de fricción entre el bloque de 3kg y la superficie de la figura es de 0.4. El sistema inicia desde el reposo. ¿Cuál es la velocidad de la bola de 5 kg cuando ha caído 1.5m?

Solución.

Una ilustración general del problema se muestra a continuación.



De la figura mostrada podemos inferir la ecuación de ligadura asociada al sistema de masas unidas por una cuerda. Si suponemos que la cuerda es inextensible y de longitud *L*, entonces se tiene que:

$$(d-x)+y+\frac{1}{2}\pi R=L$$

Donde d es la distancia fija desde el extremo de la superficie horizontal al centro de la polea y R es el radio de la polea. Al derivar esta expresión con respecto al tiempo se tiene la relación entre las velocidades de cada masa; esto es:

$$-\frac{dx}{dt}+\frac{dy}{dt}=0$$

ó

$$v_1=v_2$$

Con respecto al nivel de referencia (NR) mostrado en la figura y debido a que el sistema parte del reposo, la energía inicial del sistema se debe únicamente a la masa m_2; esto es:

$$E_i=-m_2gy \qquad (1)$$

Finalmente cuando la masa m_2 ha descendido una distancia *h*, la masa m_1 también ha recorrido sobre la superficie horizontal una distancia *h* y ambas masas en ese momento tiene una velocidad *v*, por lo que la energía final del sistema con respecto al nivel de referencia escogido y que se muestra en la figura es:

$$E_f = \frac{1}{2}m_1v^2 + \frac{1}{2}m_2v^2 - m_2g\left(y+h\right) \qquad (2)$$

Debido a la presencia de la fuerza de fricción, la cual es una fuerza no conservativa, la energía mecánica del sistema no se conserva y por tanto el cambio en la energía mecánica es igual al trabajo hecho por la fuerza externa. En este caso la fuerza externa que hace trabajo sobre el sistema es la fuerza de fricción.

$$E_f - E_i = W_{f_r} \qquad (3)$$

Como la fuerza de fricción se opone al movimiento de m1 sobre la superficie horizontal, entones el trabajo realizado por esta fuerza al desplazarse la masa m_1 una distancia h es simplemente igual a:

$$W_{f_r} = -f_r h \qquad (4)$$

Al sustituir (4) en (3) se tiene:

$$E_f - E_i = -f_r h \qquad (5)$$

Pero por definición de la fuerza de fricción cinética se tiene en este caso que:

$$f_r = \mu N \qquad (6)$$

Donde μ es el coeficiente de fricción cinético entre la superficie horizontal y m_1 y N es la normal realizada por dicha superficie a la misma masa. Pero la masa m1 no tiene movimiento vertical por lo que la normal esta compensada por el peso de la masa en todo momento, es decir:

$$N = m_1 g \qquad (7)$$

Luego al sustituir la ecuación (6) en (5) se tiene que:

$$f_r = \mu m_1 g \qquad (8)$$

Final mente al sustituir las ecuaciones (1), (2) y (8) en (5) se tiene lo siguiente:

$$\frac{1}{2}m_1v^2 + \frac{1}{2}m_2v^2 - m_2g\left(y+h\right) + m_2gy = -\mu m_1 gh$$

Resolviendo para v se tiene que:

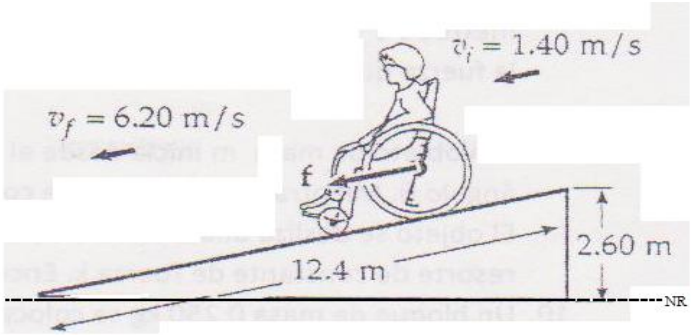
$$v = \sqrt{\frac{2gh(m_2 - \mu m_1)}{m_1 + m_2}}$$

Al sustituir las condiciones iniciales del problema, es decir m_1=3Kg, m_2=5*Kg*, μ=0.4, *h*=1.5*m* y *g*=9.8*m*/s^2 se tiene finalmente que:

$$v = \sqrt{\frac{2\times\left(9.8m/s^2\right)\times(1.5m)\times\left[5Kg-(0.4)\times(3Kg)\right]}{8Kg}} = 3.74m/s$$

5. Un muchacho en una silla de ruedas (masa total 47Kg) gana una carrera contra un competidor en patín. El muchacho tiene una rapidez de 1.4m/s en la cresta de una pendiente de 2.6m de alto y 12.4m de largo. En la parte más baja de la pendiente, su rapidez es de 6.2m/s. Si la resistencia del aire y la resistencia al rodamiento se pueden modelar como una fuerza constante de fricción de 41.0N, encuentre el trabajo realizado por el al empujarse hacia adelante en sus ruedas al viajar cuesta abajo?
Solución.

La situación general del problema se ilustra en la figura que se observa a continuación.



En este caso *f* es una fuerza interna del sistema, mientras que la fuerza de fricción es una fuerza externa que actúa sobre el sistema y realiza trabajo, por lo que el cambio en la energía del sistema es igual al trabajo realizado por la fuerza interna *f* y externa f_r.

$$E_f - E_i = W_f + W_{f_r} \qquad (1)$$

Con respecto al nivel de referencia escogido y el cual se muestra en la figura se tiene que:

$$E_i = \frac{1}{2}mv_i^2 + mgh \qquad (2)$$

Mientras que:

$$E_f = \frac{1}{2} m v_f^{\,2} \qquad (3)$$

Por otro lado se tiene también que el trabajo realizado por la fuerza de fricción es:

$$W_{f_r} = -f_r x \qquad (4)$$

Al sustituir las ecuaciones (2), (3) y (4) en (1) y resolver para W_f se tiene que:

$$\frac{1}{2} m v_f^{\,2} - \left(\frac{1}{2} m v_i^{\,2} + mgh \right) = W_f - f_r x$$

Entonces:

$$W_f = \frac{1}{2} m \left(v_f^{\,2} - v_i^{\,2} \right) - mgh + f_r x$$

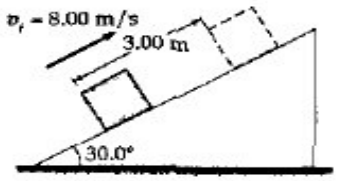
Al sustituir las condiciones iniciales dadas en el problema, es decir v_i =1.4*m/s*, v_f =6.2*m/s*, *m*=47*Kg*, *h*=2.6*m*, *x*=12.4*m*, f_r = 41N y *g*=9.8m/s se tiene que:

$$W_f = \frac{1}{2}(47Kg)\left[(6.2m/s)^2 - (1.4m/s)^2\right] - (47Kg)\times(9.8m/s^2)\times(2.6m) + (41N)\times(12.4m)$$

Entonces:

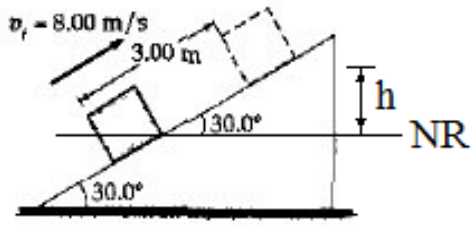
$$W_f = 168.12J$$

6. Un bloque de 5 kg se pone en movimiento ascendente en un plano inclinado con rapidez inicial de 8 m/s (ver figura). El bloque se detiene después de recorrer 3 m a lo largo del plano, el cual está inclinado en un ángulo de 30° con la horizontal. Determine para este movimiento:
   a. El cambio en la energía cinética del bloque.
   b. El cambio en su energía potencial.
   c. La fuerza de fricción ejercida sobre él (supuesta constante).
   d. El coeficiente de fricción cinético.



Solución.

Ilustración general del problema.



Con respecto al nivel de referencia (NR) que se muestra en la figura las energías iniciales y finales del bloque son:

$$E_i = \frac{1}{2} m v_i^2 \qquad (1)$$

y

$$E_f = mgh = mgxsen\theta \qquad (2)$$

a) El cambio en la energía cinética del bloque es:

$$\Delta K = K_f - K_i = 0 - \frac{1}{2} m v_i^2 .$$

Entonces

$$\Delta K = -\frac{1}{2} m v_i^2 = \frac{(5Kg)\times(8m/s)^2}{2} = -160J$$

b) El cambio en la energía potencial del bloque es en este caso:

$$\Delta U_g = U_{gf} - U_{gi} = U_{gf} - 0$$

Entonces:

$$\Delta U_g = U_{gf} = mgxsen\theta = (5Kg)\times(9.8m/s^2)\times(3m)sen30° = 73.5J$$

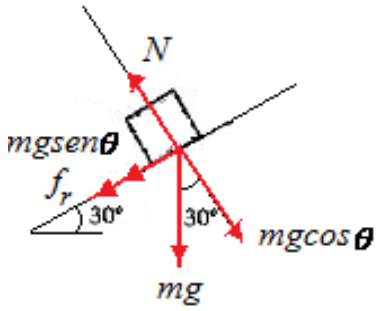
c) Como el cambio en la energía mecánica es igual al trabajo realizado por la fuerza de fricción, entonces tenemos:

$$\Delta K + \Delta U_g = -f_r x$$

De donde se tiene finalmente para la fuerza de fricción que:

$$f_r = -\frac{(\Delta K + \Delta U_g)}{x} = -\frac{(-160J + 73.5J)}{3m} = 28.8N$$

d) El coeficiente de fricción cinético.



Del diagrama de fuerzas que se muestra en la figura anterior se observa que:

$$N = mg\cos 30°$$

Luego la fuerza de fricción es entonces

$$f_r = \mu N = \mu mg\cos 30°$$

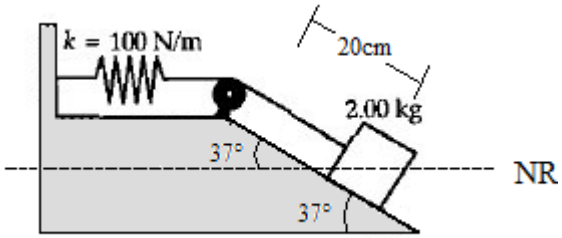
De aquí se tiene que:

$$\mu = \frac{f_r}{mg\cos 30°} = \frac{28.8N}{(5Kg)\times(9.8m/s^2)\cos 30°} = 0.679$$

7. Un bloque de 2 kg situado sobre una pendiente rugosa se conecta a un resorte de 100N/m. El bloque se suelta desde el reposo cuando el resorte no está deformado, y la polea no presenta fricción. El bloque se mueve 20 cm hacia abajo de la pendiente antes de detenerse. Encuentre el coeficiente de fricción cinético entre el bloque y el plano inclinado.

Solución.

Ilustración general del problema.



Con respecto al nivel de referencia (NR) que se muestra en la figura las energías iniciales y finales del bloque son:

$$E_i = mgxsen\theta \qquad (1)$$

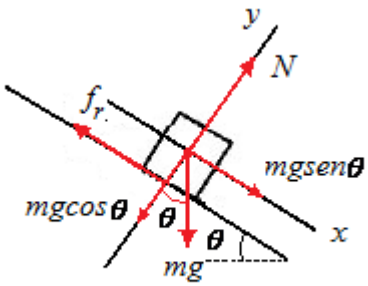
y

$$E_f = \frac{1}{2}Kx^2 \qquad (2)$$

Como la superficie del plano presenta fricción, entonces la energía mecánica no se conserva y por tanto se tiene que:

$$E_f - E_i = -f_r x \qquad (3)$$

A continuación se ilustra en el siguiente gráfico un diagrama de fuerzas sobre el bloque



Del diagrama de fuerza se observa que:

$$N = mg\cos\theta$$

Por lo que la fuerza de fricción en este caso está dada por:

$$f_r = \mu N = \mu mg\cos\theta \qquad (4)$$

Luego al sustituir (1), (2) y (4) en (3) se tiene lo siguiente:

$$\frac{1}{2}Kx^2 - mgxsen\theta = -\mu mgx\cos\theta$$

Resolviendo para el coeficiente de fricción con los valores iniciales dados en el problema se tiene:

$$\mu = \frac{mgsen\theta - \frac{1}{2}Kx}{mg\cos\theta}$$

$$\mu = \frac{(2Kg)\times(9.8m/s^2)sen37° - \left(\frac{1}{2}\right)\times(100N/m)\times(0.2m)}{(2Kg)\times(9.8m/s^2)\cos 37°} = 0.115$$

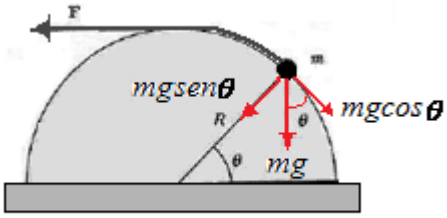
8. Una pequeña partícula de masa m se tira de una cuerda a la parte superior de un cuerpo semicilíndrico sin fricción, de radio R. La cuerda pasa por la parte superior del cilindro, como se ilustra. a) Si la partícula se mueve a rapidez constante, la componente de su aceleración tangencial debe ser cero en todo tiempo. b) Por integración directa de.

$$W = \int_A^B \vec{F}.d\vec{r}s$$

Encuentre el trabajo realizado al mover la partícula a rapidez constante desde la parte inferior a la parte superior del cuerpo semicilíndrico.

Solución.

La figura que se muestra a continuación ilustra de forma general el problema planteado.



De la figura se observa que:

$$\sum F_{\hat{t}} = F - mg\cos\theta = 0 \qquad (1)$$

Nota: La sumatoria anterior de las fuerzas en la dirección tangencial es cero porque la masa se mueve a velocidad constante, por lo que no experimenta aceleración tangencial.

La sumatoria de las fuerzas normales es:

$$\sum F_{\hat{N}} = mgsen\theta = m\frac{v^2}{R} \qquad (2)$$

En este caso, la fuerza normal no realiza trabajo sobre la masa, ya que en todo momento esta es perpendicular al desplazamiento de dicha masa. Luego el trabajo realizado al mover la masa hasta la parte superior del semicilindro se debe la componente del peso a lo largo de la dirección tangencias, es decir, de la ecuación (1) se tiene que:

$$F = mg\cos\theta \qquad (3)$$

Luego el trabajo realizado lo podemos obtener mediante la expresión:

$$W = \int_A^B \vec{F}.d\vec{s} \qquad (4)$$

En este caso *ds* además de ser paralela a *F* se relaciona con el radio del semicilindro y el ángulo barrido θ mediante la expresión:

$$s = R\theta$$

De donde al derivar se tiene que:

$$ds = Rd\theta \qquad (5)$$

Al sustituir (3) y (5) en (4) se tiene lo siguiente:

$$W = \int_0^{\frac{\pi}{2}} mg\cos\theta Rd\theta = mgR\left[sen\frac{\pi}{2} - sen0\right] = mgR$$

9. Una partícula de 4 kg se desplaza horizontalmente de tal forma que su posición varía con el tiempo según la ecuación $x = t + 2t^3$, donde *x* se mide en metros y *t* en segundos. Determinar en función del tiempo: a) su energía cinética, b) su aceleración y la fuerza que actúa sobre, c) la potencia de la fuerza. d) Determinar el trabajo realizado sobre la partícula en el intervalo de tiempo de 0 a 2 s.

Solución

a) Derivando con respecto al tiempo se tiene:

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = 1 + 6t^2 \quad \Rightarrow \quad E_c(t) = \frac{1}{2}mv^2 = 2\left(1 + 6t^2\right)^2$$

b) Derivando nuevamente con respecto al tiempo tenemos:

$$a(t)=\frac{dv}{dt}=12t \qquad \Rightarrow \qquad F(t)=ma=48t$$

c) La potencia desarrollada por la fuerza será:

$$P(t)=F(t)v(t)= \quad 48t\left(1+6t^2\right)$$

d) Para calcular el trabajo podemos integrar la potencia ya que en este caso:

$$W=\int F(t)\,dx=\int F(t)\frac{dx}{dt}dt=\int P(t)\,dt$$

Entonces se tiene que:

$$W=\int_0^2 P(t)\,dt=\int_0^2 48t\left(1+6t^2\right)dt=1248\text{ J}$$

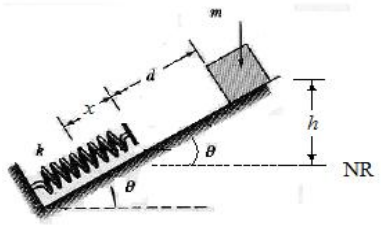
También se puede calcular el trabajo realizado sobre la partícula en el intervalo de 0 a 2 s, calculando la variación de energía cinética sufrida por la partícula en ese intervalo de tiempo; es decir:

$$W=\Delta E_c=E_c(2)-E_c(0)=1250\text{ J}-2\text{ J}=1248\text{ J}$$

10. Un objeto de masa *m* inicia desde el reposo y se desliza una distancia *d* por un plano inclinado sin fricción de ángulo θ. Mientras se desliza, hace contacto con un resorte no estirado de masa despreciable, como se muestra en la figura. El objeto se desliza una distancia adicional x cuando es llevado momentáneamente al reposo por compresión del resorte de constante de fuerza K. Encuentre la separación inicial *d* entre objeto y resorte.

Solución.

Ilustración del problema.



Con respecto al nivel de referencia que se muestra en la figura, las energías iniciales y finales del bloque son:

$$E_i = mgh = mg\left(d + x\right)sen\theta \qquad (1)$$

y

$$E_f = \frac{1}{2}Kx^2 \qquad (2)$$

Como el plano no presenta fricción, entonces la energía se conserva y por lo tanto tenemos lo siguiente:

$$E_i = E_f \qquad (3)$$

Al sustituir (1) y (2) en (3) se tiene que:

$$mg\left(d + x\right)sen\theta = \frac{1}{2}Kx^2$$

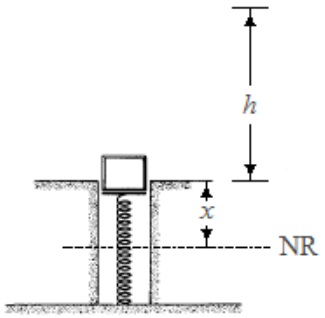
Entonces:

$$d = \frac{Kx^2}{2mgsen\theta} - x$$

11. Un bloque de masa 0.250kg se coloca sobre la parte superior de un resorte vertical ligero, de constante de fuerza 5000 N/m, y empujado hacia abajo de modo que el resorte se comprime 0.1m. Después de que el bloque se suelta desde el reposo, avanza hacia arriba y luego se separa del resorte. ¿A qué altura máxima sube sobre el punto de liberación?

Solución.

La figura que se muestra a continuación ilustra de forma general el problema planteado.



De acuerdo al nivel de referencia (NR) escogido las energías iniciales y finales del bloque son:

$$E_i = \frac{1}{2}Kx^2 \qquad (1)$$

y

$$E_f = mg(x+h) \qquad (2)$$

Como la energía se conserva, entonces:

$$E_f = E_i$$

Esto es:

$$mg(x+h) = \frac{1}{2}Kx^2$$

De donde se tiene que:

$$h = \frac{Kx^2}{2mg} - x = \frac{(5000N/m)\times(0.1m)^2}{2\times(0.25Kg)\times(9.8m/s^2)} - (0.1m) = 10.2m$$